Corrigé

Partie A

1. **a.** La fonction f est continue et dérivable sur $[0\ ;\ 10]$. En utilisant les règles de dérivation d'un produit, on obtient :
$f'(t) = 3\mathrm{e}^{-0,5t+1} + 3t \times -0,5\mathrm{e}^{0,5t+1} = \mathrm{e}^{-0,5t+1}(+-3(0,5t+1)) = (-1,5t+3)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$
Donc $\forall t \in [0\ ;\ 10]$, $f'(t) = 3(-0,5t+1)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$

   b. $\forall t \in [0\ ;\ 10]$, $\mathrm{e}^{-0,5t+1} > 0$ donc $f'(t)$ a le même signe que $-0,5t+1$.
$-0,5t+1 \geqslant 0 \iff x \leqslant 2$.
Dans le tableau : $f(0) = 0$, $f(2) = 6\mathrm{e}^0 = 6$ et $f(10) = 30\mathrm{e}^{-5+1} = 30\mathrm{e}^{-4}$.
D'où le tableau de variation de f :

x	0		2		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	6	$\searrow$	$30\mathrm{e}^{-4}$

   c. Le maximum de la fonction f est atteint pour $t = 2$, et $f(2) = 6$. La dose maximale de 6 mg sera atteinte au bout de 2 heures.

2. **a.** Sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$, la fonction f est continue et strictement croissante à valeurs dans $[0\ ;\ 6]$. Or $5 \in [0\ ;\ 6]$, donc d'après le corollaire du TVI (théorème des valeurs intermédiaires), l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.
À la calculatrice, $\alpha \approx 1,02$.

   b. D'après le tableau de variations, $f(t) \geqslant 5 \iff t \in [\alpha\ ;\ \beta]$. De plus $\beta - \alpha = 2,44$ (heures).
Donc le traitement sera efficace pendant 2,44 heures soit environ 146 minutes.

Partie B

1. Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang diminue de 30 %, donc il en reste 70 %. Puis on en injecte à nouveau 1,8 mg. Sachant que $u_0 = 2$, alors $u_1 = 0,70 \times 2 + 1,8 = 3,2$.
Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang sera de 3,2 mg.

2. Soi $n \in \mathbb{N}$. u_n désigne la quantité de médicament dans le sang au bout de n heures. Une heure plus tard, il ne restera que 70 % de la quantité précédente (70 % de u_n), puis on en ajoute 1,8 mg par injection.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,7 \times u_n + 1,8$.

3. **a.** Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = 3,2$. Donc $u_0 \leqslant u_1 < 6$. L'initialisation est vérifiée.
Hérédité : on suppose que si $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
Montrons que $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$.
$u_n \leqslant u_{n+1} < 6 \iff 0,7 \times u_n \leqslant 0,7 \times u_{n+1} < 0,7 \times 6 \iff 0,7u_n \leqslant 0,7u_{n+1} < 4,2$
donc $0,7u_n + 1,8 \leqslant 0,7u_{n+1} + 1,8 < 4,2 + 1,8 \iff 0,7u_n + 1,8 \leqslant 0,7u_{n+1} + 1,8 < 6$.
Donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$. L'hérédité est démontrée.
Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$.
D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

   b. Nous venons de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$. Cela signifie que la suite (u_n) est croissante et majorée par 6. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie notée ℓ.

   c. La suite (u_n) converge vers ℓ donc ℓ est l'unique solution de l'équation $\ell = 0,7\ell + 1,8$ (théorème du point fixe).
$l = 0,7l + 1,8 \iff 0,3l = 1,8 \iff l = 6$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = -u_n + 6$.

   a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -u_{n+1} + 6 = -(0,7 \times u_n + 1,8) + 6 = -0,7u_n + 4,2 = 0,7\left(-u_n + \dfrac{4,2}{0,7}\right)$
$= 0,7(-u_n + 6) = 0,7v_n$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,7n_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,7 et de premier terme $v_0 = -u_0 + 6 = 4$.

   b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 0,7^n$.
De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -u_n + 6$ donc $u_n = -v_n + 6 = 6 - 4 \times 0,7^n$.

   c. $u_n \geqslant 5,5 \iff 6 - 4 \times 0,7^n \geqslant 5,5 \iff -4 \times 0,7^n \geqslant -0,5 \iff 0,7^n \leqslant \dfrac{-0,5}{-4}$
$\iff \ln(0,7^n) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{8}\right) \iff n \times \ln(0,7) \leqslant -\ln(8) \iff n \geqslant -\dfrac{\ln(8)}{\ln(0,7)}$ car $\ln(0,7) < 0$
Donc $n \geqslant -\dfrac{2\ln(2)}{\ln(0,7)}$. À la calculatrice : $-\dfrac{2\ln(2)}{\ln(0,7)} \approx 5,83$ donc $n \geqslant 6$.
Cela signifie que $u_6 \geqslant 5,5$. Il faudra donc au total 7 injections (de l'injection initiale u_0 à la 7e qui correspond à u_6).